

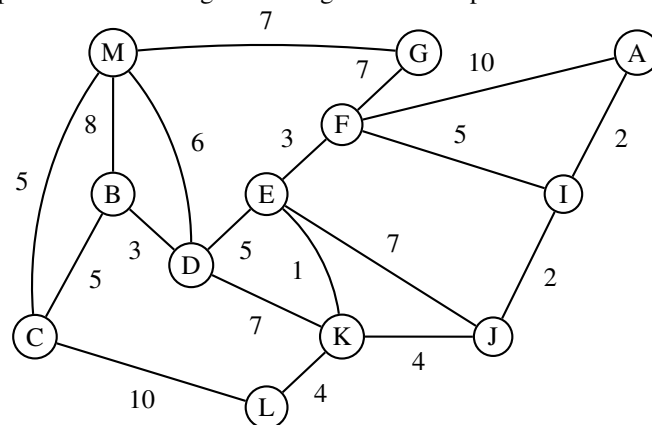
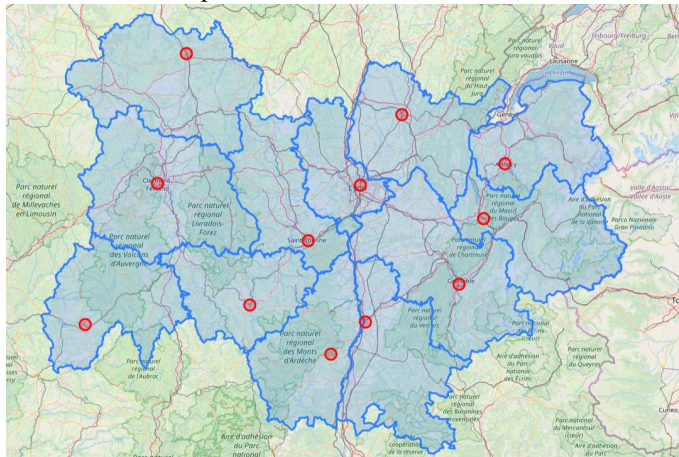
PARTIE 1 : NOTION DE GRAPHE PONDÉRÉ



1. EXEMPLE ET VOCABULAIRE

Comment déterminer le meilleur itinéraire entre deux villes d'un réseau routier ?

Ci-dessous sont représentées de deux manères différentes les 12 préfectures de la région Auvergne Rhône-Alpes.



Sur le diagramme de droite :

- Les 12 villes sont symbolisées par les points M, B, C,..., A.
- Les routes reliant ces villes sont représentées par des segments.
- Les coûts de transport (en euros) nécessaires pour emprunter les routes sont indiqués sur chaque segment.



2. À RETENIR

- Un tel diagramme s'appelle un **graphe**.
- Les points, représentant les villes, sont appelés les **sommets** du graphe.
- Les segments, représentant les routes, sont appelés les **arêtes** (ou arcs) du graphe.
- Optionnel : sur chaque arête, on peut donner une valeur numérique indiquant la distance, la durée, le coût, ... nécessaire pour l'emprunter (on dit alors que le **graphe est pondéré**)



3. EXERCICE

Au sommet M du graphe précédent se trouve la ville de Moulins et au sommet A se trouve la ville d'Annecy.

1. Déterminer deux itinéraires possibles pour aller de Moulins à Annecy.
2. Calculer le coût total de chacun de ces deux itinéraires.
3. Est-il possible de trouver un itinéraire dont le coût est inférieur à 25 € ?



1. MÉTHODE ILLUSTRÉE

Il est possible de déterminer le chemin donnant le coût minimal du graphe en suivant la méthode suivante appelée algorithme de **Dijkstra**.

On construit un tableau où, sur chaque ligne, on met le **coût total** dépensé jusqu'ici.

Etape 1 : Mise en place d'un tableau avec tous les sommets

M	B	C	D	G	F	E	K	L	J	I	A
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

Etape 2 : En partant de M, on peut aller en B, C, D ou G.

Une fois le déplacement fait, on ne repassera plus par M car cela augmenterait le coût.

M	B	C	D	G	F	E	K	L	J	I	A
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
-	8 _M	5 _M	6 _M	7 _M	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

Etape 3 : Le meilleur choix est C (coût total de 5 €)

On repart de C (et on ne repassera plus jamais en C)

On peut aller en L ou B

M	B	C	D	G	F	E	K	L	J	I	A
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
-	8 _M	5 _M	6 _M	7 _M	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
-	10_C	-	6 _M	7 _M	∞	∞	∞	15 _C	∞	∞	∞
-	9_D	-	-	7 _M	∞	∞	∞	15 _C	∞	∞	∞

Dans la colonne B, on barre 10_C car il est plus cher que 8_M

Etape 4 : Le meilleur choix est D (coût total de 6€).

On repart de D (et on ne repassera plus jamais en D)

On peut aller en B, E ou K

M	B	C	D	G	F	E	K	L	J	I	A
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
-	8 _M	5 _M	6 _M	7 _M	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
-	10_C	-	6 _M	7 _M	∞	∞	∞	15 _C	∞	∞	∞
-	9_D	-	-	7 _M	∞	11 _D	13 _D	15 _C	∞	∞	∞
-	-	-	-	-	14 _G	11 _D	13 _D	15 _C	∞	∞	∞

Dans la colonne B, on barre 9_D car il est plus cher que 8_M

Etape 5 : Le meilleur choix est G (coût total de 7 €).

On repart de G (et on ne repassera plus jamais en G)

On peut aller en F

M	B	C	D	G	F	E	K	L	J	I	A
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
-	8 _M	5 _M	6 _M	7 _M	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
-	10_C	-	6 _M	7 _M	∞	∞	∞	15 _C	∞	∞	∞
-	9_D	-	-	7 _M	∞	11 _D	13 _D	15 _C	∞	∞	∞
-	9_D	-	-	-	14 _G	11 _D	13 _D	15 _C	∞	∞	∞
-	-	-	-	-	14 _E	-	12 _E	15 _C	18 _E	∞	∞

Etape 6 : Le meilleur choix est B (coût total de 8 €).

On repart de B mais on ne peut aller nulle part.

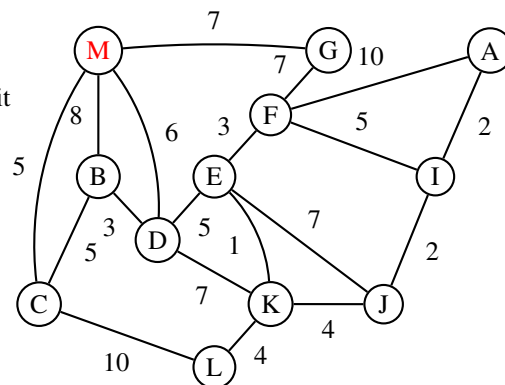
Le meilleur choix est alors E (coût total de 11 €).

On repart de E (et on ne repassera plus jamais en E)

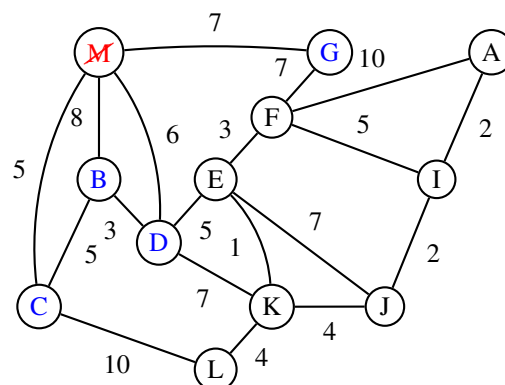
On peut aller en F, J, K.

M	B	C	D	G	F	E	K	L	J	I	A
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
-	8 _M	5 _M	6 _M	7 _M	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
-	10_C	-	6 _M	7 _M	∞	∞	∞	15 _C	∞	∞	∞
-	9_D	-	-	7 _M	∞	11 _D	13 _D	15 _C	∞	∞	∞
-	9_D	-	-	-	14 _G	11 _D	13 _D	15 _C	∞	∞	∞
-	-	-	-	-	14 _E	-	12 _E	15 _C	18 _E	∞	∞

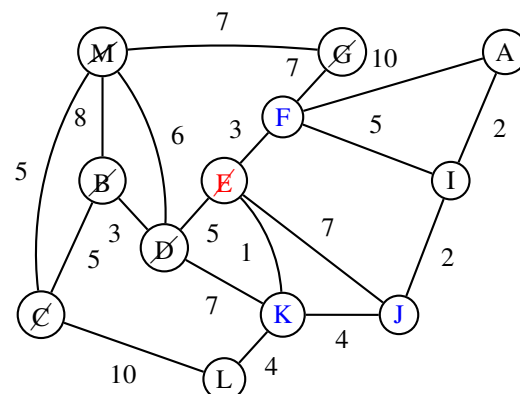
graphe à l'étape 1



graphe à l'étape 2



graphe à l'étape 6



Etape 7 : Le meilleur choix est K (coût total de 12 €).

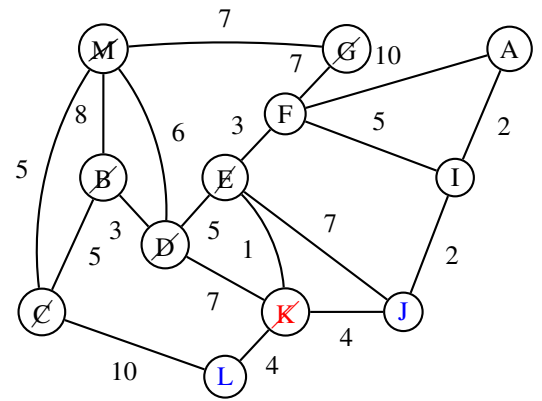
On repart de K (et on ne repassera plus jamais en K)

On peut aller en L et J.

M	B	C	D	G	F	E	K	L	J	I	A
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
-	8 _M	5 _M	6 _M	7 _M	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
-	10_C	-	6 _M	7 _M	∞	∞	∞	15 _C	∞	∞	∞
-	9_D	-	-	7 _M	∞	11 _D	13 _D	15 _C	∞	∞	∞
-	9_D	-	-	-	14 _G	11 _D	13 _D	15 _C	∞	∞	∞
-	-	-	-	-	14 _E	-	12 _E	15 _C	18 _E	∞	∞
-	-	-	-	-	14 _E	-	-	16_K	16 _K	∞	∞

Dans la colonne L, on barre 16_K car il est plus cher que 15_C

graphe à l'étape 7



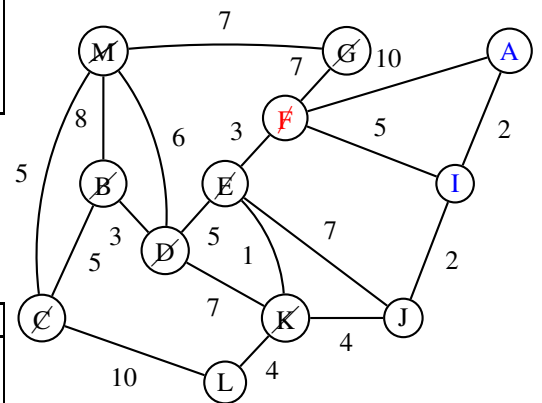
Etape 8 : Le meilleur choix est F (coût total de 14 €).

On repart de F (et on ne repassera plus jamais en F)

On peut aller en A et I.

M	B	C	D	G	F	E	K	L	J	I	A
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
-	8 _M	5 _M	6 _M	7 _M	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
-	10_C	-	6 _M	7 _M	∞	∞	∞	15 _C	∞	∞	∞
-	9_D	-	-	7 _M	∞	11 _D	13 _D	15 _C	∞	∞	∞
-	9_D	-	-	-	14 _G	11 _D	13 _D	15 _C	∞	∞	∞
-	-	-	-	-	14 _E	-	12 _E	15 _C	18 _E	∞	∞
-	-	-	-	-	-	-	-	16_K	16 _K	19 _F	24 _F

graphe à l'étape 8



Etape 9 : Le meilleur choix est L (coût total de 15 €).

On repart de L mais on ne peut aller nulle part.

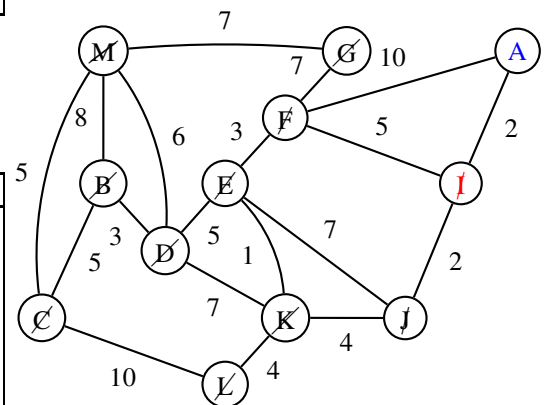
Le meilleur choix est alors J.

On repart de J (et on ne repassera plus jamais en J)

On peut aller en I.

M	B	C	D	G	F	E	K	L	J	I	A
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
-	8 _M	5 _M	6 _M	7 _M	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
-	10_C	-	6 _M	7 _M	∞	∞	∞	15 _C	∞	∞	∞
-	9_D	-	-	7 _M	∞	11 _D	13 _D	15 _C	∞	∞	∞
-	9_D	-	-	-	14 _G	11 _D	13 _D	15 _C	∞	∞	∞
-	-	-	-	-	14 _E	-	12 _E	15 _C	18 _E	∞	∞
-	-	-	-	-	-	-	-	16_K	16 _K	19 _F	24 _F
-	-	-	-	-	-	-	-	16_K	-	18 _J	24 _F

graphe à l'étape 10



Etape 10 et dernière (ouf!) : Le meilleur choix est I (coût total de 18 €)..

On repart de I (et on ne repassera plus jamais en I)

On peut aller en A.

M	B	C	D	G	F	E	K	L	J	I	A
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
-	8 _M	5 _M	6 _M	7 _M	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
-	10_C	-	6 _M	7 _M	∞	∞	∞	15 _C	∞	∞	∞
-	9_D	-	-	7 _M	∞	11 _D	13 _D	15 _C	∞	∞	∞
-	9_D	-	-	-	14 _G	11 _D	13 _D	15 _C	∞	∞	∞
-	-	-	-	-	14 _E	-	12 _E	15 _C	18 _E	∞	∞
-	-	-	-	-	-	-	-	16_K	16 _K	19 _F	24 _F
-	-	-	-	-	-	-	-	16_K	-	18 _J	24 _F
-	-	-	-	-	-	-	-	16_K	-	-	20 _I

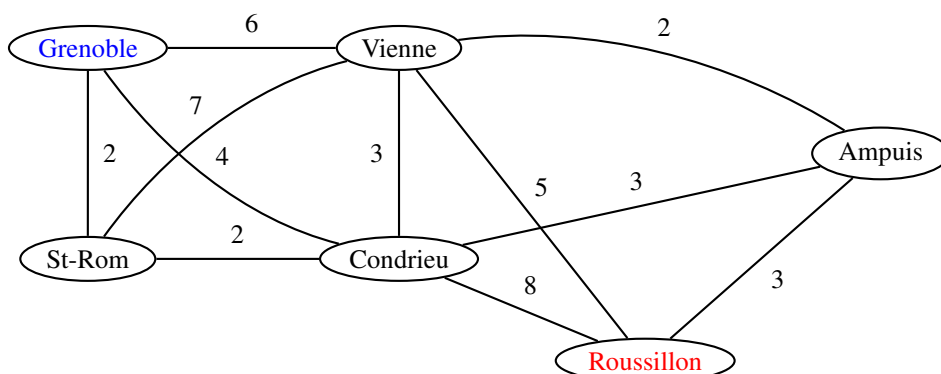
Bilan :

- L'algorithme s'arrête, on a parcouru tous les sommets du graphe.
- Le prix de l'itinéraire le moins coûteux est 20 €.
- En lisant le tableau en partant de la fin, on obtient cet itinéraire. Il s'agit de :

MDEKJIA

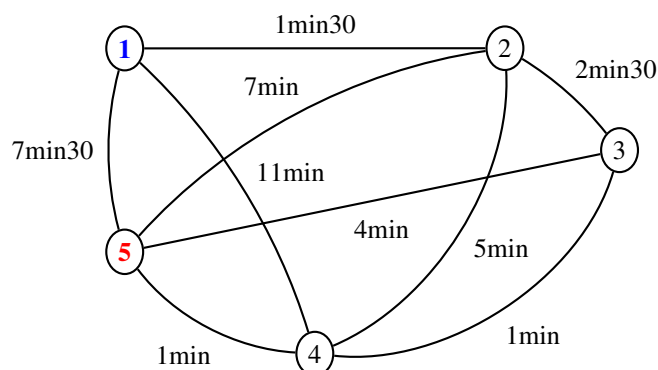
2. EXERCICES

1. Le graphe ci-dessous représente le coût en euros, d'acheminement d'une marchandise le long du réseau routier. Par une méthode analogue à l'exemple précédent, déterminer le chemin le moins coûteux permettant de livrer un colis depuis le sommet **Grenoble** jusqu'au sommet **Roussillon**.



Etape	Grenoble	St-Rom	Vienne	Condrieu	Ampuis	Roussillon
1	0	∞	∞	∞	∞	∞
2						
3						
4						
5						
6						

2. Les temps de parcours entre les manèges d'un parc d'attraction sont inscrits sur le graphe suivant :



A l'aide de l'algorithme de Dijkstra déterminer la durée de parcours la plus courte allant de 1 à 5.

Etape	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					

APPEL

→ Appeler le professeur pour vérification